

弃渣土体分形级配方程及最大干密度预测模型

王莘晴^{1,2}, 张晓超¹, 裴向军^{1,3}

(1. 成都理工大学 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室, 四川 成都 610059;
2. 四川交通职业技术学院 建筑工程系, 四川 成都, 611000; 3. 天府永兴实验室, 四川 成都, 610213)

摘 要: 弃渣土体的密实性显著影响其力学性能, 定量分析颗粒级配对其干密度的影响尤为重要。通过采集不同成渣方式形成的弃渣土体开展颗粒分析和室内相对密度试验, 定量研究了颗粒级配对弃渣土体干密度的影响。研究表明: 渣料呈现明显的分形特征, 主要级配曲线类型为凹型和缓 S 型; 基于广义 Logistics 函数和颗粒质量分形模型, 构建二参数粒度分形级配方程, 可有效描述弃渣级配特征, 参数 a 和 b 可调控曲线的斜率及曲率; 采用粒度分形级配方程, 积分可得级配曲线面积, 建立弃渣土体极值干密度预测模型; 确定了弃渣土体最优级配曲线特征及对应参数范围。研究成果可为弃渣堆场的堆置设计、碾压施工及边坡稳定性分析提供科学依据。

关 键 词: 弃渣土体; 极值干密度; 颗粒级配; 分形理论; 压实性

中图分类号: TU 449

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2025) 10-3157-10

Fractal grading equation and maximum dry density prediction model of waste slag soil

WANG Xin-qing^{1,2}, ZHANG Xiao-chao¹, PEI Xiang-jun^{1,3}

(1. State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu, Sichuan 610059, China;
2. Department of Architecture and Civil Engineering, Sichuan Vocational and Technical College of Communications, Chengdu, Sichuan 611000, China;
3. Tianfu Yongxing Laboratory, Chengdu, Sichuan 610213, China)

Abstract: The compactness of waste residue soil significantly affects its mechanical properties, and it is particularly important to quantitatively analyze the influence of particle gradation on its dry density. The effect of particle size distribution on the dry density of waste slag soil was quantitatively studied by collecting waste slag soil formed by different slag forming methods and conducting particle size distribution and indoor relative density tests. The results show that slag material presents obvious fractal characteristics, with the main gradation curve types being concave and slow S-shaped. Based on the generalized Logistics function and the particle mass fractal model, a two-parameter particle size fractal grading equation is developed. This equation effectively describes the grading characteristics of the waste slag, with parameters a and b adjusting the slope and curvature of the curve. Using the particle size fractal grading equation, the area of the grading curve is integrated, and a prediction model for the extreme dry density of waste slag soil is established. The characteristics of the optimal gradation curve of the waste slag soil and the corresponding parameter range are determined. The research results offer a scientific basis for the stacking design, rolling construction and slope stability analysis of waste slag yards.

Keywords: waste slag soil; extreme dry density; particle gradation; fractal theory; compactness

1 引 言

随着大型工程建设(如高速公路、铁路、城市轨道交通及矿山开采等)的不断发展,施工过程中弃渣排放的问题日益突出。渣料的密实性显著影响

其物理力学强度^[1-4], 一般而言, 渣料颗粒堆积越密实, 其密度和强度越大, 堆积体越稳定。

目前, 在工程领域, 以弃渣土体为研究对象的成果相对较少。作为典型的粗粒土, 已有学者对粗粒土的力学性能与颗粒级配的相关性进行了大量研

收稿日期: 2025-02-25

录用日期: 2025-04-30

基金项目: 西藏自治区重点研发计划项目(No.XZ202401ZY0091)。

This work was supported by the Key R & D Projects in Xizang Autonomous Region (XZ202401ZY0091).

第一作者简介: 王莘晴, 女, 1988年生, 博士研究生, 副教授, 主要从事工程地质、岩土工程等方面的研究。E-mail: 245857464@qq.com

通讯作者: 裴向军, 男, 1970年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事地质灾害防治与修复工程等方面的教学和科研工作。E-mail: peixj0119@tom.com

究^[5-12]。然而,上述研究控制土体级配的指标并不统一,常采用不均匀系数 C_u 、曲率系数 C_c 和含石量 ω 等。这些指标未能准确表述土体中不同粒组的质量占比。例如,传统的级配指标 C_u 和 C_c 的粒径覆盖范围为 $d_{10} \sim d_{60}$, 缺失了 40% 粒组的质量占比数据;而含石量 ω 仅反映了粗细粒的含量,无法定量描述各粒组的颗粒具体占比。此外,土石阈值的规定标准也存在差异^[13-15]。因此,科学表征弃渣土体的颗粒级配信息,并建立其与干密度之间的映射关系,是深入研究弃渣土体力学特性的关键。

为准确描述弃渣土体的颗粒级配特征,本文考虑了钻爆法和盾构掘进法(tunnel boring machine, 简称 TBM)两种不同成渣方式,以大型工程建设排放的弃渣土体为研究对象,进行了颗分试验。结果表明,在炸药和机械作用下破碎形成的弃渣土体颗粒具有较强的自相似性和分形特性。目前已有大量学者借助级配方程开展岩土体力学性质研究,现有理论在描述复杂级配曲线及其应用中却仍有局限。如 Talbot 方程单一幂函数形式仅能有效描述凹形或接近直线形的级配曲线^[3],描述弃渣土体典型的缓 S 型曲线时,中等粒径区间误差显著;Sukkarak 等^[4]提出的三参数级配方程虽可描述 S 型曲线,但对凹型或近直线型级配曲线的适用性较差;丁林楠等^[16]提出的双参数方程可对复杂的级配曲线较好地拟合,但参数量级变化范围广,全局优化过程中或出现多组参数拟合精度相近的情况;吴二鲁等^[17]提出的单参数级配方程能较好地拟合凹型和缓 S 型曲线,朱晟^[18]、郭万里^[19]等提出的连续级配方程也表现优异,但方程参数均未直接与分形质量模型建立联系,限制了分形理论在级配方程中的应用。尽管已有多种级配方程被提出,但能兼顾描述精度、参数稳定性及分形理论的弃渣土体级配方程,仍然匮乏。

关于弃渣土体的干密度预测模型的研究尚未深入展开,但已有研究表明^[16-20],粗粒土的干密度与其粒径分布、堆积方式等因素密切相关。传统的干密度预测模型多基于不均匀系数 C_u 和曲率系数 C_c 等指标,然而由于级配方程的局限性,这些模型往往无法准确反映粗粒土的复杂级配特性。因此,针对粗粒土的干密度预测模型逐渐多样化,部分研究尝试结合分形理论来描述颗粒级配对于干密度的影响,但目前的模型在适用范围上仍存在不足,未能有效涵盖非严格分形的级配曲线,难以反映严格分形与非严格分形级配曲线在干密度变化上的差异^[21-26]。

本文针对弃渣土体的级配特征,提出了一种新

的粒度分形级配方程,并利用该方程建立了级配曲线面积与最大干密度之间的预测模型。分形级配方程的变量与 Talbot 方程一致,引入了参数 a 和 b 以控制级配曲线的斜率和曲率,从而全面反映材料中各粒径组的占比信息,并弥补了传统分形模型在描述非凹型级配曲线方面的不足。通过大量现场试验数据和回归分析,进一步简化为单参数级配方程,有效降低了模型对初始参数的依赖,确保其在弃渣土体中的良好适用性。通过相对密度试验,研究了不同级配条件下弃渣土体的干密度变化规律,采用级配曲线方程对级配曲线面积进行积分,最终建立了弃渣土体级配曲线面积与最大干密度之间的预测模型。

2 弃渣土体级配分形特征

2.1 弃渣土体级配分布特征

以某大型工程建设项目排放的弃渣土体为研究对象,该项目为线性工程,穿越不同岩性地层,施工方法有钻爆法和 TBM 法两种。根据现场施工进度,选取钻爆法弃渣体 3 处、TBM 弃渣体两处进行调研。为全面揭示弃渣颗粒级配分布特征,采用公路标准土壤筛和自制筛网进行原型级配试验,每个弃渣体取自坡上、坡下两个测点,分别以 1、2 作后缀。钻爆法弃渣体测点以 ZB 为前缀表示,TBM 弃渣体测点以前缀 TBM 表示,将颗分数据整理,绘制弃渣级配曲线(见图 1、2)。

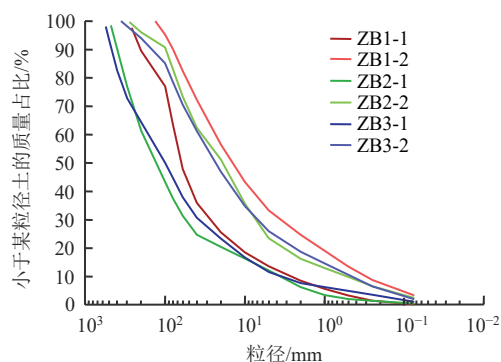


图1 钻爆法渣料原型级配曲线

Fig.1 Grading curves of drilling and blasting slag prototype

从级配曲线可以看出,钻爆法渣料(见图 1)粒径较 TBM 弃渣(见图 2)粒径大,界限粒径 d_{60} 分布范围为 40~200 mm,不均匀系数为 26~82,曲率系数为 1~4,级配连续。TBM 渣料采用机器凿岩成渣,最大粒径大多约 20 cm,机械凿岩细粒较多,界限粒径 d_{60} 分布范围为 15~50 mm,不均匀系数为 70~108,曲率系数为 1.5~2.9,级配连续。

弃渣土体原型级配曲线整体呈凹型、缓 S 型分布，曲线较为缓和时，近似直线型分布。

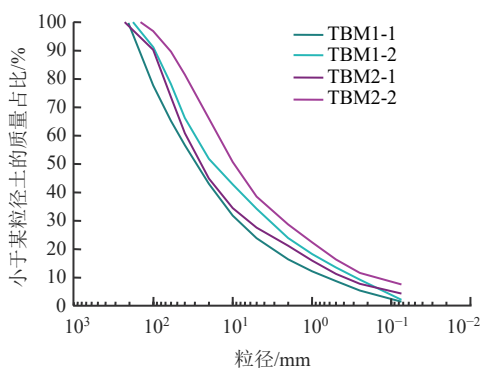


图 2 TBM 渣料原型级配曲线

Fig.2 Gradation curves of TBM slag prototype

2.2 分形理论及数学模型

材料粒度分形模型多以颗粒质量数学描述为主^[22]，理论依据如下：

$$A(r > R) = C_a \left[1 - \left(\frac{R}{\lambda_a} \right)^{2-D} \right] \quad (1)$$

式中：\$A\$ 为平面中能覆盖所有半径大于给定值 (\$R\$) 的颗粒的总面积；\$r\$ 为颗粒半径；\$R\$ 为给定半径值（此处可认作标度）；\$C_a\$ 和 \$\lambda_a\$ 分别为与颗粒形状和标度有关的常数；\$D\$ 为分形维数。

\$D\$ 是描述颗粒材料级配分布的一个重要参数，反映了颗粒粒径在不同尺度上的分布特征。对于颗粒级配分布，\$D\$ 值越高表明颗粒分布越密，越低则颗粒分布越稀疏。

将式 (1) 中的面积 \$A\$ 换算为体积 \$V\$：

$$V(r > R) = C_v \left[1 - \left(\frac{R}{\gamma_v} \right)^{3-D} \right] \quad (2)$$

式中：\$V\$ 为半径小于给定 \$R\$ 值的颗粒体积；\$C_v\$、\$\gamma_v\$ 为与颗粒形状和标度有关的常数。

将式 (2) 中的体积 \$V\$ 换成土的质量 \$M\$ 则有：

$$M(r \geq R) = d_s C_m \left[1 - \left(\frac{R}{\lambda_m} \right)^{3-D} \right] \quad (3)$$

式中：\$C_m\$ 和 \$\lambda_m\$ 分别为与颗粒形状和计算标度有关的常量；\$d_s\$ 为颗粒相对密度。将颗粒相对密度 \$d_s\$ 视为恒定，变量仅为质量 \$M\$ 和测量尺度 \$R\$、分形维数 \$D\$。

对式 (3) 中的测量尺度取最小值，\$r=0\$，则所有颗粒的总质量 \$M_T\$ 为

$$M_T = M(r \geq 0) = d_s C_m \left[1 - \left(\frac{0}{\lambda_m} \right)^{3-D} \right] \quad (4)$$

$$M_T = d_s C_m \quad (5)$$

用式 (4) 除以式 (5) 可得

$$\frac{M(r \geq R)}{M_T} = 1 - \left(\frac{R}{\lambda_m} \right)^{3-D} \quad (6)$$

当 \$R = R_{\max}\$ 时 (\$R_{\max}\$ 为最大粒径)，由 \$M(r \geq R) = 0\$

可得 \$\lambda_m = R_{\max}\$，且 \$\frac{M(r \geq R)}{M_T} = 1 - \frac{M(r \leq R)}{M_T}\$，则有：

$$\frac{M(r \leq R)}{M_T} = \left(\frac{R}{R_{\max}} \right)^{3-D} \quad (7)$$

由于 \$\frac{M(r \leq R)}{M_T} \leq 1\$，故 \$D \in [0, 3]\$。分形维数可以

通过分析颗粒的粒径及其累计体积分布的关系来

表征。对式 (7) 取对数，\$R_{\max}\$ 视为常数，可得

$$\lg \frac{M(r \leq R)}{M_T} = (3-D) \lg \frac{R}{R_{\max}} + a \quad (8)$$

式中：\$a\$ 为对数坐标下的拟合常数。

采用式 (8)，可依级配数据对土体分形维数 \$D\$ 进行计算。

双对数坐标 \$\lg \frac{M(r \leq R)}{M_T} - \lg \frac{R}{R_{\max}}\$ 下呈直线分布，

表明粒度满足分形特征，斜率为 \$D\$。\$\frac{R}{R_{\max}} \leq 1\$，

\$\frac{M(r \leq R)}{M_T} \leq 100\%\$，坐标系 \$\lg \frac{M(r \leq R)}{M_T} - \lg \frac{R}{R_{\max}}\$ 下筛

分数据散点的终值均为 \$(0, 2)\$，采用终点约束拟合，则直线截距恒等于 2。

2.3 渣料级配试验分形验证

采用式 (8) 对弃渣土体级配数据进行分形验证，结果见图 3、4。

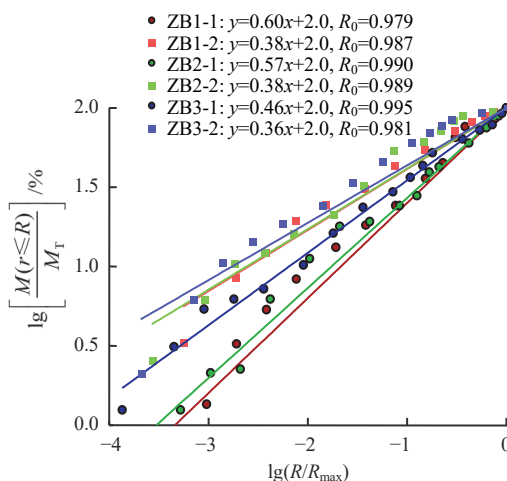


图 3 钻爆法弃渣土体分形验证

Fig.3 Fractal verification of drilling and blasting slag material

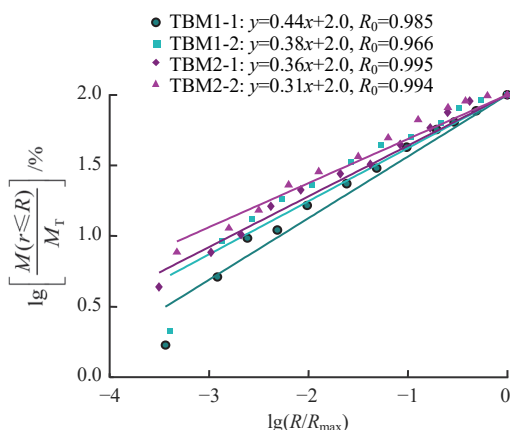


图4 TBM 弃渣土体分形验证

Fig.4 Fractal verification of TBM slag material

将各试样对应的分形维数 D 和回归相关系数 R 汇总于表 1。

表 1 测点位置与分形指标统计表

Table 1 Statistics of measuring point position and fractal index

测点位置	分形维数 D	相关系数 R_0	测点位置	分形维数 D	相关系数 R_0
ZB1-1	2.40	0.979	ZB3-2	2.64	0.981
ZB1-2	2.62	0.987	TBM1-1	2.56	0.985
ZB2-1	2.43	0.990	TBM1-2	2.62	0.966
ZB2-2	2.62	0.989	TBM2-1	2.64	0.995
ZB3-1	2.54	0.995	TBM2-2	2.69	0.994

弃渣土体级配分形指标 D 主要分布在 2.35~2.65 之间, 相关系数均高于 0.96, 说明弃渣材料级配曲线具有良好的分形结构。从粒径范围看, 钻爆法粒径较 TBM 法分布更广, 分形拟合效果更好, 原因主要是钻爆法对岩体原生裂隙的敏感性较高, 爆炸能量会沿着裂隙优先传播, 导致岩体在不同裂隙网络区域的破碎程度差异显著, 破碎后自相似性更强; 而 TBM 通过滚刀对岩体施加压剪力, 滚刀切削岩体的过程是连续、稳定的。破碎作用主要集中在滚刀所覆盖的切削深度和刀间距范围内, 所以生成的颗粒粒径集中在一个较窄的范围。加之岩体破碎过程, 能量分布并不均匀, 破碎能量的梯度分布导致级配曲线在小粒径和大粒径范围内的累积分布率较低, 在中间粒径范围内出现较大比例, 形成凹型曲线。如破碎过程细颗粒受到多次作用, 或自身强度不足, 细粒累积率快速上升, 中等粒径范围, 破碎颗粒的数量达到峰值, 累积率变化趋于平稳; 大粒径范围, 大块颗粒数量少, 累积率变化缓慢, 形成缓 S 型级配曲线。所以, 弃渣材料的级配曲线特征主要为凹型曲线和缓 S 型曲线, 与施工方式无关。

而作为幂函数方程, 颗粒质量数学模型适用于

凹型曲线的描述, 针对现场典型的缓 S 型级配曲线, 该模型表征级配信息存在一定的局限性。因此, 有必要建立一种新的数学表达, 以定量描述弃渣土体典型级配。

3 粒度分形级配方程

3.1 粒度分形级配方程构建

参照广义 Logistics 函数与多种级配方程构建方式^[16-19], 构建连续级配曲线方程如下:

$$P_d = \frac{1}{1 - e^b + e^{b-a \lg \frac{d}{d_{\max}}}} \times 100\% \quad (9)$$

式中: P_d 为小于某粒径 d 的累计含量; a 、 b 为拟合参数。

以 $d_{\max}=60$ mm 为例, 通过 a 、 b 参数的组合调整, 该方程可以反映 3 种不同连续级配分布曲线, 近直线型、缓 S 型曲线和凹型曲线。

当 $d=d_{\max}$ 时, $P_d=100\%$; 当 d 取值极小, 趋近于 0 时, $P_d = \frac{1}{1+e^{+\infty}}$ 趋近于 0。对于任意一条配曲线, 均为 d 的增函数, P_d 对 d 求偏导数, 其值大于 0。

$$\frac{\partial P_d}{\partial d} = \frac{ae^{\frac{b-a \lg \frac{d}{d_{\max}}}{\ln 10}}}{d \ln 10 \left(1 + e^{\frac{b-a \lg \frac{d}{d_{\max}}}{\ln 10}} - e^b \right)^2} > 0 \quad (10)$$

粒径 d 为大于 0 的实数, $\ln 10 = 2.30259 > 0$, 因此 $a > 0$ 。 b 值无正负号要求。

3.2 参数对级配曲线影响

3.2.1 方程参数 a 对级配曲线影响

粒度分形级配方程参数 a 控制级配曲线曲率。当 $d_{\max}=60$ mm, $b=0.2$ 时, 分别取 $a=0.50$ 、1.00、1.50、2.00, 所得级配曲线如图 5 所示。当 $a=0.50$ 时, 曲线接近直线, 颗粒的分布较均匀; 当 $a=2.00$ 时, 曲线明显下凹, 颗粒的细粒含量显著减少。 a 值越大, 曲线曲率越大, 细粒含量越少。当 $d_{\max}=60$ mm, $b=0.5$ 时, 取 $a=0.50$ 、1.00、1.50、2.00, 绘制级配曲线, a 值对级配曲线影响趋势如图 6 所示, 影响趋势与图 5 一致。当 $a=2.00$ 时, 曲线的曲率最大, 表明参数 a 是影响级配曲线形态的关键因素, 主要控制曲线的曲率。

3.2.2 方程参数 b 对级配曲线影响

当 $d_{\max}=60$ mm, $a=1.15$ 时, 分别取 $b=-2.50$ 、-1.50、-0.50、1.00 绘制级配曲线如图 7 所示。当 b

值从 1.00 逐渐减小至 -2.50，曲线依次从凹型、近直线型，过渡至缓 S 型。当 $a=1.61$ 时，取 $b=-2.50$ 、 -1.50 、 -0.50 、 1.00 绘制级配曲线如图 8 所示，曲线变化趋势与图 7 一致。参数 b 直接控制曲线形态，随着 b 值逐渐减小，曲线从凹型过渡至缓 S 型。

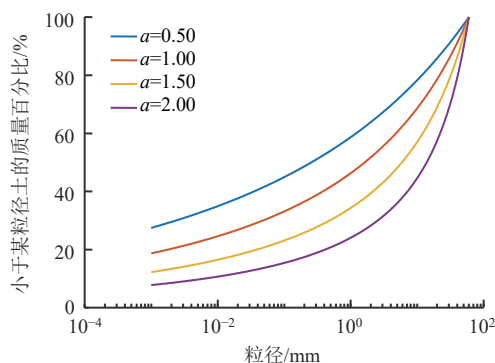


图 5 参数 a 值对曲线形态影响 ($b=0.20$)

Fig.5 Effect of parameter a on curve shape ($b=0.20$)

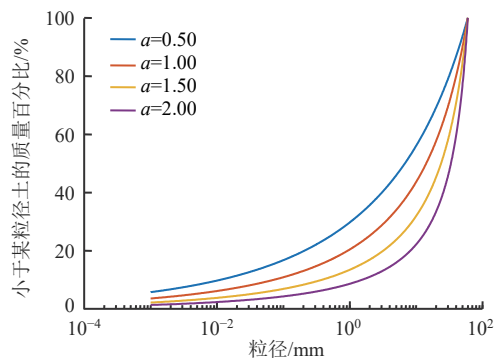


图 6 参数 a 值对曲线形态影响 ($b=0.50$)

Fig.6 Effect of parameter a on curve shape ($b=0.50$)

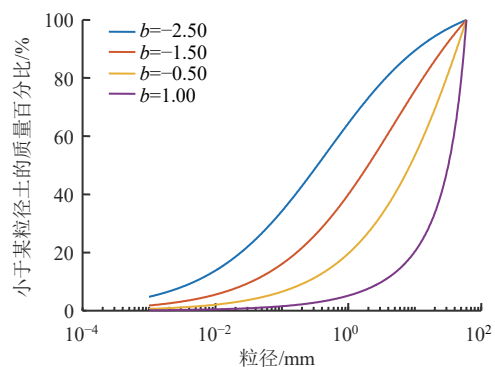


图 7 参数 b 值对曲线形态影响 ($a=1.15$)

Fig.7 Effect of parameter b on curve shape ($a=1.15$)

3.3 参数取值范围

粒度分形级配方程作为双参数方程，或存在不唯一解，级配参数分布随机、离散。考虑粒度分形级配方程与颗粒质量数学模型均具有相同变量 $d/d_{\max}$ ，将颗粒质量数学模型分形维数 D 纳入粒度分形方程，回归得半理论半经验公式，确定参数分

布区间，探求级配曲线分布规律随参数变化规律。

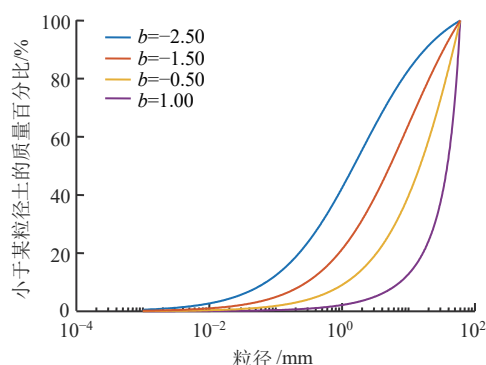


图 8 参数 b 值对曲线形态影响 ($a=1.61$)

Fig.8 Effect of parameter b on curve shape ($a=1.61$)

取 121 组数据，分别计算粒度分形级配方程和颗粒质量数学模型相关参数 a 、 b 、 R_1^2 、 $3-D$ 、 R_2^2 ，其中， R_1 为粒度分形级配方程拟合相关系数， R_2 为颗粒质量数学模型拟合相关系数。对 a 与 $3-D$ 进行回归分析，得回归关系 $a=23(3-D)(1.1-R_2^2)$ ，代入粒度分形级配方程，根据级配数据可得 $3-D$ 、 R_2^2 ，则有单参数级配方程：

$$P_d = \frac{1}{1 - e^b + e^{b - 23(3-D)(1.1-R_2^2) \lg \frac{d}{d_{\max}}}} \times 100\% \quad (11)$$

其中， D 、 R_2^2 均采用式 (8) 拟合所得，可视作已知参数。式 (11) 即为关于 b 的单参数级配方程。

121 组数据拟合优度均大于 0.9，拟合效果好。为检验模型误差是否存在系统偏差，对拟合残差进行 K-S 检验。结果表明，每组数据的 K-S 检验的 h 值均为 0，所有数据组 (100%) 的 p 值都大于 0.05。即 121 组数据的残差符合正态分布的假设。 p 值大于 0.05 表明，在 5% 的显著性水平下，数据的残差遵循正态分布 (见图 9)。简化级配方程采用非线性最小二乘法拟合模型可有效捕获数据主要特征，残差通过正态性分布检验 (见图 10)，模型误差具有随机性，无系统偏差，能有效地解释和预测 121 组数据，简化后粒度分形级配方程具有较好适用性。

不同于其他粗、细粒级配方程，单参数级配方程是置于分形分布前提下讨论的，标准分形拟合相关系数 $R_2^2 \geq 0.85$ ，是单参数级配方程适用前提。

P_d 对 d 求偏导数，有

$$\frac{\partial P_d}{\partial d} = \frac{ae^{\frac{b-a}{\ln 10} \lg \frac{d}{d_{\max}}}}{d \ln 10 \left(1 + e^{\frac{b-a}{\ln 10} \lg \frac{d}{d_{\max}}} - e^b \right)^2} > 0 \quad (12)$$

粒径 d 为大于 0 的实数, $\ln 10 = 2.302 59 > 0$, 因此 $a > 0$ 。根据 a 与 n (级配指数 $n = 3 - D$) 之间的回归分析公式, $a = 23(3 - D)(1.1 - R_2^2)$, 结合粒度分形级配方程适用范围可知 $D \in [2.2, 2.7]$, $1 \geq R_2^2 \geq 0.85$, 参数 a 主要分布范围为 $[0.69, 4.416]$, b 值无正负号要求, 主要分布范围为 $[-5, 1]$ 。

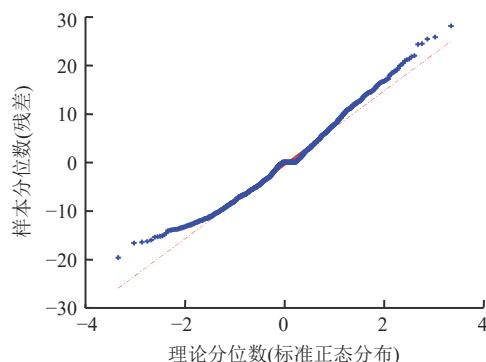


图 9 单参数级配方程拟合残差直方图

Fig.9 Single parameter gradation equation fitting residual histogram

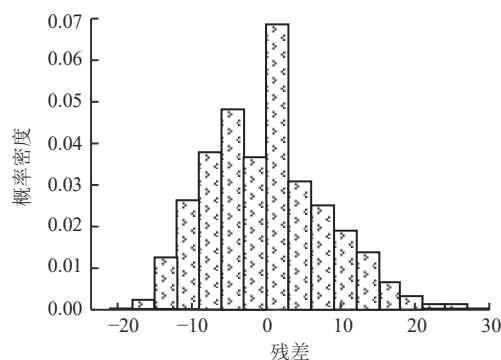


图 10 残差回归分析分布正态性验证

Fig.10 Residual regression analysis distribution normality verification

4 弃渣土体极值干密度

4.1 弃渣土体极值干密度分布规律

为简要表明级配曲线分形特征, 令 $D = 2.65$ 、 2.55 、 2.45 、 2.35 、 2.25 , 设计凹型级配曲线和 S 型级配曲线, 选用钻爆法与 TBM 法两种渣料进行试验。试样编号首字母 Z 表示钻爆法渣料, T 表示 TBM 渣料, 第 2 个字母 A 代表凹型曲线, S 代表 S 型曲线, 以钻爆法凹型曲线 $D = 2.65$ 为例, 编号为 ZA1, 具体级配数据采用式 (11) 进行拟合, 如图 11、12 所示。

采用振动台法测定最大干密度。相对密度仪型号为 XM-301A, 试样尺寸为 $\phi 300 \text{ mm} \times 340 \text{ mm}$, 振动频率为 $0 \sim 60 \text{ Hz}$, 振动幅度为 $0 \sim 2 \text{ mm}$ 。试验结

果汇总如图 13、14 所示。

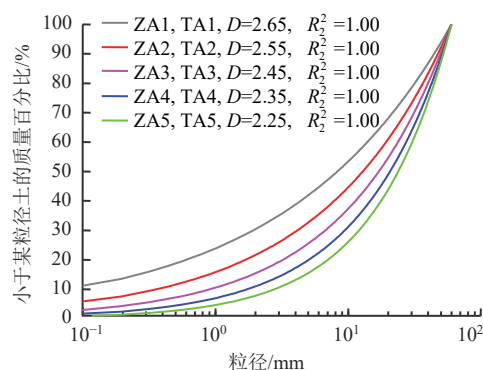


图 11 凹型级配曲线

Fig.11 Concave gradation curves

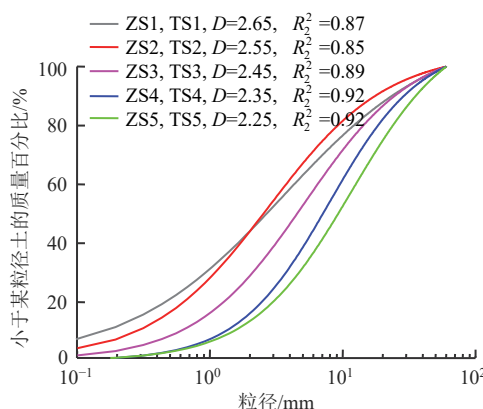


图 12 S 型级配曲线

Fig.12 S-type gradation curves

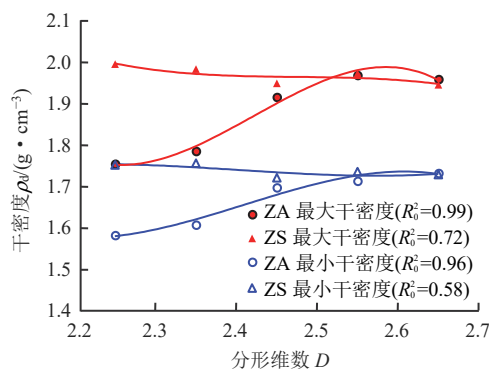


图 13 钻爆法渣料干密度变化规律

Fig.13 Variation of dry density of drilling and blasting slag

钻爆法渣料整体最大干密度分布范围为 $1.756 \sim 1.995$, 相同分形维数, 不同级配曲线类型极值干密度相差较大, 随着分形维数增大, ZA1~ZA5 极值干密度, 呈先增大后减小, 峰值对应分形维数在 $2.55 \sim 2.65$ 之间, 而 ZS1~ZS5 弃渣土体干密度则随分形维数增大逐步减小; TBM 渣料最大干密度较钻爆法渣料大, 分布于 $1.968 \sim 2.103$ 之间。TA1~

TA5 渣料的极值干密度逐步增大, 而 TS1~TS5 极值干密度则呈现减小—增大—减小趋势。

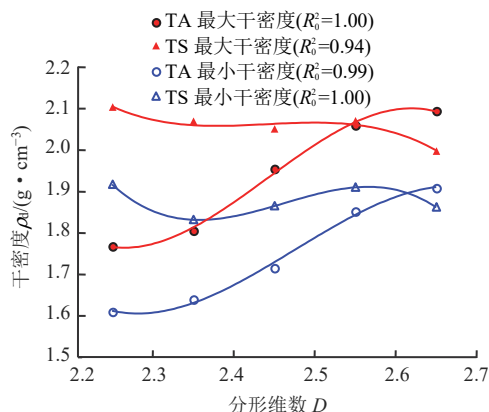


图 14 TBM 渣料干密度变化规律

Fig.14 Variation of dry density of TBM slag

弃渣土体极值干密度波动较大, 对于具有分形特征的级配曲线, 采用分形维数 D 难以直接建立其与极值干密度之间的关系。

4.2 分形级配曲线与极值干密度

弃渣土体级配曲线多为非标准分形曲线, 不满足严格意义的分形, 但不同形态级配曲线在坐标轴覆盖范围不同, 尤其凹型与缓 S 型曲线, 质量占比粒径区间差异显著, 采用粒度分形级配方程将级配曲线与对数坐标积分, 将其覆盖面积量化, 定义为级配曲线覆盖面积, 记作 A 。

半对数坐标系下, 对 ZA、TA、ZS、TS 试样级配曲线进行积分, 得级配曲线覆盖面积 A 汇总如表 2 所示。

表 2 试样级配曲线覆盖面积 A
Table 2 Coverage area A of gradation curves

试样	级配曲线覆盖面积 A	试样	级配曲线覆盖面积 A
ZA1、TA1	1.119	ZS1、TS1	1.411
ZA2、TA2	0.915	ZS2、TS2	1.406
ZA3、TA3	0.767	ZS3、TS3	1.169
ZA4、TA4	0.657	ZS4、TS4	0.971
ZA5、TA5	0.572	ZS5、TS5	0.879

相较于不均匀系数和曲率系数等传统土力学指标, 级配曲线覆盖面积可以更好地描述弃渣土体整体级配特性。以 A 为横坐标, 对应极值干密度为纵坐标绘制干密度变化曲线如图 15、16 所示。

相较于分形维数, 级配曲线覆盖面积可以更好地表述极值干密度变化规律。两种渣料的极值干密度均随级配曲线覆盖面积的增大呈现先增大后减小趋势, 与弃渣土体成渣方式无关, 与曲线类型无关。当 $A \geq 0.9$ 时, 对应极值干密度整体较大。

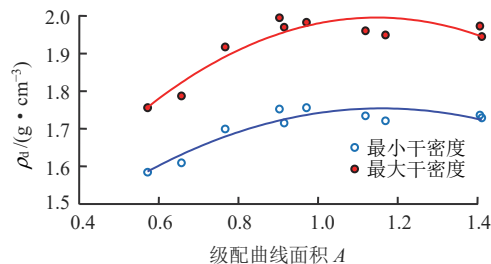


图 15 钻爆法渣料干密度与级配面积关系

Fig.15 Relationship between dry density and gradation area of drilling and blasting slag

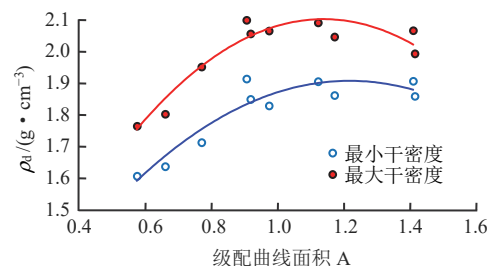


图 16 TBM 渣料干密度与级配面积关系

Fig.16 Relationship between dry density and gradation area of TBM slag

两种弃渣土体极值干密度拟合参数见表 3, 弃渣土体级配曲线覆盖面积与极值干密度关系可采用二次项函数 $\rho_d = \alpha A^2 + \beta A + \gamma$ 表述, 其中, α 、 β 、 γ 为拟合系数。 α 为二次项系数, 反映了覆盖面积 A 对干密度增长或减少的非线性影响的程度, 二次函数呈先增长后减小趋势, 所以 $\alpha < 0$; β 为一次项系数, 反映了覆盖面积对干密度的线性贡献, 根据抛物线极值为正, 可判定 $\beta > 0$; γ 为常数项, $\gamma > \beta^2 / 4\alpha$, 当覆盖面积 $A=0$ 时, 为单一粒径情况下的干密度, 对具有分形特征且级配连续的弃渣材料而言, $A \neq 0$ 。结合前文级配方程适用条件, 该函数在 $D \in (2.2, 2.7)$ 范围内, 分形拟合相关系数 $R_2^2 \geq 0.85$ 条件下适用。

表 3 弃渣极值干密度拟合参数
Table 3 Fitting parameters of extreme dry density for waste slag soil

拟合参数	钻爆法		TBM 法	
	最大干密度	最小干密度	最大干密度	最小干密度
α	-0.721	-0.487	-1.095	-0.767
β	1.653	1.130	2.491	1.866
γ	1.048	1.099	0.686	0.773
R_2^2	0.872	0.876	0.911	0.883

4.3 高压缩性级配曲线分布规律

上述两组弃渣土体相对密度试验结果显示, 试样 ZS4、ZS5、ZA2 和 TS4、TS5、TS2 均具有较高

的极值干密度, 对应渣料压实性较高 (见图 17)。

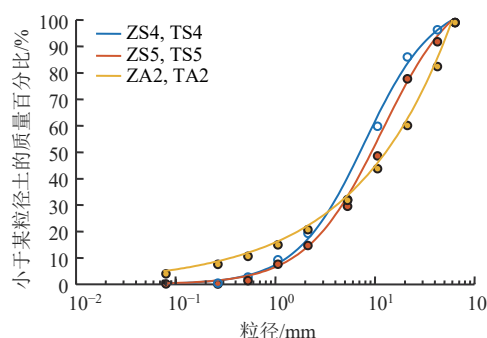


图 17 试样 ZS4、ZS5、ZA2 级配曲线

Fig.17 Grading curves of samples ZS4, ZS5, ZA2

尽管级配曲线类型不同, 3 条级配曲线 (见图 17) 对应的 P_5 含量 (小于 5 mm 的粒径质量百分比) 较为接近, 主要介于 30%~35% 之间, 与前人研究结论^[18, 26]一致。文献认为, 对应分形级配曲线 $P_5=35\%$ 时, 具有较好压实性, 对于 $d_{\max}=60$ mm 的弃渣土体, 定义 $P_5=35\%$ 为理论最优级配曲线, 级配曲线经过点 (5, 35)。将该值换算代入粒度分形级配方程则有:

$$P_5 = \frac{100\%}{1 - e^b + e^{b-a \lg \frac{5}{60}}} = 35\% \quad (13)$$

将百分比转换为小数形式, 交叉相乘去除分数:

$$1 = 0.35(1 - e^b + e^{b-a \lg(5/60)}) \quad (14)$$

展开右边的括号, 将所有项移到方程的一边, 除以 0.35 简化方程:

$$e^b - e^{b-a \lg(5/60)} = -\frac{13}{7} \quad (15)$$

由换底公式, 将对数转换可得

$$e^{b+a \frac{\ln 12}{\ln 10}} - e^b = \frac{13}{7} \quad (16)$$

将指数和对数结合, 处理对数项, 提出公因数, 可得

$$a = \frac{\ln(1 + \frac{13}{7e^b})}{\ln 12 / \ln 10} \quad (17)$$

将满足式 (17) 的级配参数 a 、 b 关系绘于图 18 中, 结合 a 与 $3-D$ 之间的回归分析结果, $a=23(3-D)$ ($1.1-R_2^2$), 记级配指数 $n=3-D$, n 取值范围为 0.3~0.8, R_2^2 范围为 0.85~1, 则 n 、 R_2^2 、 b 满足:

$$23n(1.1-R_2^2) = \frac{\ln(1 + \frac{13}{7e^b})}{\ln 12 / \ln 10} \quad (18)$$

绘制符合优良级配参数 n 、 R_2^2 、 b 关系见图 19。

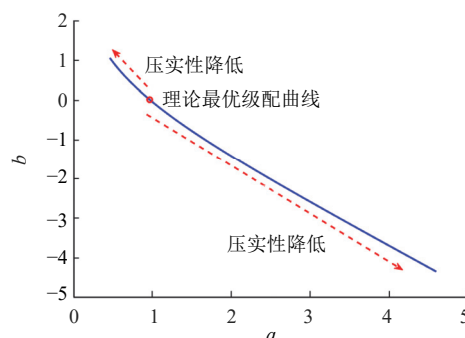


图 18 优化设计级配参数 a 、 b 关系

Fig.18 Relationship between gradation parameters a , b for optimal design

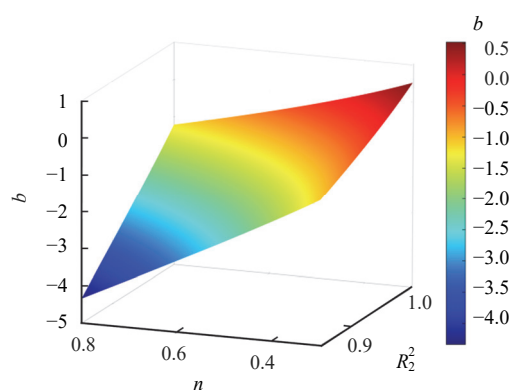


图 19 优化设计级配参数 n 、 R_2^2 、 b 关系

Fig.19 Relationship among gradation parameters n , R_2^2 , b for optimal design

5 结 论

依据大型弃渣土体实地调研数据, 通过相对密度试验, 探究不同级配组成下弃渣土体的压密性, 为渣场边坡稳定性分析与弃渣堆筑、碾压施工提供科学依据。得出主要结论如下:

(1) 钻爆法、TBM 法渣料均具备粒度分形特征, 级配曲线分布形式主要为凹型曲线、近直线型和缓 S 型。

(2) 基于分形理论构建了粒度分形级配方程

$P_d = \frac{1}{1 - e^b + e^{b-a \lg \frac{d}{d_{\max}}}} \times 100\%$, 该方程普适性强, 对拟合初始参数依赖小, 具有唯一解, 其中, $a \in [0.69, 4.416]$, $b \in [-5, 1]$ 。

(3) 弃渣土体极值干密度与级配曲线覆盖面积 A 呈二次函数关系。当 $A \geq 0.9$ 时, 极值干密度较大, 压实性较强。

(4) 系列相对密度试验表明, $P_5 \in (30\%, 35\%)$ 时, 弃渣极值干密度大, 定义 $P_5=35\%$ 为理论最优级配曲线, 结合不同分形维数要求可通过公式

$23n(1.1-R_2^2) = \frac{\ln(1+\frac{13}{7e^b})}{\ln 12/\ln 10}$ 快速得到高压实性级配曲线。

参 考 文 献

- [1] 朱俊高, 郭万里, 王元龙, 等. 连续级配土的级配方程及其适用性研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(10): 1931-1936.
ZHU Jun-gao, GUO Wan-li, WANG Yuan-long, et al. Equation for soil gradation curve and its applicability[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2015, 37(10): 1931-1936.
- [2] 陈坚. 路基粗颗粒填料堆积特性试验研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2010.
CHEN Jian. Experimental study on packing characteristics of gravel filling subgrade[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2010.
- [3] TURCOTTE D L. Fractals and fragmentation[J]. **Journal of Geophysical Research Solid Earth**, 1986, 91(B2): 1921-1926.
- [4] SUKKARAK R P, TJAWEE P, JONGPRADIST P, et al. Deformation analysis of high CFRD considering the scaling effects[J]. **Geomechanics and Engineering**, 2018, 14(3): 211-224.
- [5] 冯瑞玲, 陶建利, 赵占厂, 等. 含粗粒的细粒土的压实特性研究[J]. 岩土力学, 2010, 31(2): 382-386.
FENG Rui-ling, TAO Jian-li, ZHAO Zhan-chang, et al. Research on compaction property of fine soil containing coarse granulae[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(2): 382-386.
- [6] 杜俊, 朱维伟, 沈兴刚. 宽级配粗粒土压缩变形特性试验研究[J]. 水利与建筑工程学报, 2021, 19(6): 50-56.
DU Jun, ZHU Wei-wei, SHEN Xing-gang. Experimental study on compression deformation characteristics of coarse-grained soils[J]. **Journal of Water Resources and Architectural Engineering** 2021, 19(6): 50-56.
- [7] 张春顺, 林正鸿, 杨典森, 等. 考虑初始级配影响的粗粒土非线性弹性模型研究[J]. 岩土力学, 2025, 46(3): 750-760.
ZHANG Chun-shun, LIN Zheng-hong, YANG Dian-sen, et al. Nonlinear elastic constitutive model of coarse-grained soils considering the effect of initial grain size distribution[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2025, 46(3): 750-760.
- [8] 胡锦涛, 杨启贵, 熊堃, 等. 软岩筑坝颗粒的破碎特性试验研究[J]. 岩土力学, 2024, 45(增刊 1): 359-370.
- [9] HU Jin-fang, YANG Qi-gui, XIONG Kun, et al. Experimental study on crushing characteristics of soft rock damming particles[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2024, 45(Suppl.1): 359-370.
- [9] 加力别克·阿哈力别克, 朱晟. 考虑级配影响的堆石料力学特性研究[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2020, 42(1): 18-23.
JIALIBIEKE Ahalibieke, ZHU Sheng. Study on mechanical properties of rockfill soils considering gradation effect[J]. **Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences)**, 2020, 42(1): 18-23.
- [10] 孙向军, 潘家军, 卢一为, 等. 级配和密度组合对粗粒土强度特性的影响[J]. 长江科学院院报, 2023, 40(8): 133-138.
SUN Xiang-jun, PAN Jia-jun, LU Yi-wei, et al. Influence of gradation and density combination on strength characteristics of coarse-grained soil[J]. **Journal of Changjiang River Scientific Research Institute**, 2023, 40(8): 133-138.
- [11] MCDOWELL G R, BOLTON M D, ROBERTSON D. The fractal crushing of granular materials[J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1996, 44(12): 2079-2102.
- [12] 郑钢鏢, 康天合, 柴肇云, 等. 运用 Rosin-Rammler 分布函数研究煤尘粒径分布规律[J]. 太原理工大学学报, 2006, 12(3): 317-319.
ZHENG Gang-biao, KANG Tian-he, CHAI Zhao-yun, et al. Applied the Rosin-Rammler distribution function to study on the law of coal dust particle-size distribution[J]. **Journal of Taiyuan University of Technology**, 2006, 12(3): 317-319.
- [13] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB/T 50123—2019 土工试验方法标准[S]. 北京: 中国计划出版社, 2019.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. GB/T 50123—2019 Standard for geotechnical testing method[S]. Beijing: China Planning Press, 2019.
- [14] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB/T 50145—2007 土的工程分类标准[S]. 北京: 中国标准出版社, 2007.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. GB/T 50145—2007 Standard for engineering classification of soil[S]. Beijing: China Standards Press, 2007.

- [15] ASTM International. ASTM D2487-17e1 Standard practice for classification of soils for engineering purposes (unified soil classification system)[S]. West Conshohocken, PA: ASTM International, 2020.
- [16] 丁林楠, 李国英, 魏匡民. 描述土体级配分布的级配方程及其适用性[J]. 岩土力学, 2022, 43(增刊 1): 173-183. DING Lin-nan, LI Guo-ying, WEI Kuang-min. Gradation equation describing the distribution of soil gradation and its applicability[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2022, 43(Suppl.1): 173-183.
- [17] 吴二鲁, 朱俊高, 王龙, 等. 粗粒土单参数级配方程及其适用性研究[J]. 岩土力学, 2020, 41(3): 831-836. WU Er-lu, ZHU Jun-gao, WANG Long, et al. Single-parameter gradation equation of coarse-grained soil and its applicability[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(3): 831-836.
- [18] 朱晟. 连续分布的粗粒土级配方程与压实性能[J]. 岩土工程学报, 2019, 41(10): 1899-1906. ZHU Sheng. Gradation equation and compaction characteristics of continuously distributed coarse-grained soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2019, 41(10): 1899-1906.
- [19] 郭万里, 朱俊高, 余挺, 等. 土的连续级配方程在粗粒料中的应用[J]. 岩土力学, 2018, 39(10): 3661-3667. GUO Wan-li, ZHU Jun-gao, YU Ting, et al. Application of gradation equation for coarse-grained materials[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(10): 3661-3667.
- [20] CAVARRETTA I, COOP M, O'SULLIVAN C. The influence of particle characteristics on the behavior of coarse-grained soils[J]. **Geotechnique**, 2010, 60(6): 413-423.
- [21] 胡杰铭. 基于分形理论的单一粒径组钙质砂蠕变试验研究[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2021. HU Jie-ming. Experimental study on creep characteristics of uniformly graded calcareous sand based on fractal theory[D]. Xiangtan: Xiangtan University, 2021.
- [22] 舒志乐, 刘保县, 梁宁慧, 等. 基于数字图像处理的土石体粗料分形特性研究[J]. 地下空间与工程学报, 2012, 8(3): 511-516, 589. SHU Zhi-le, LIU Bao-xian, LIANG Ning-hui, et al. Study on the fractal characteristics of earth-rock coarse grain based on digital image processing[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2012, 8(3): 511-516, 589.
- [23] 舒志乐, 刘新荣, 刘保县, 等. 土石混合体粒度分形特性及其与含石量和强度的关系[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2010, 41(3): 1096-1101. SHU Zhi-le, LIU Xin-rong, LIU Bao-xian, et al. Granule fractal properties of earth-rock aggregate and relationship between its gravel content and strength[J]. **Journal of Central South University (Natural Science Edition)**, 2010, 41(3): 1096-1101.
- [24] 舒志乐, 刘新荣, 刘保县, 等. 基于分形理论的土石混合体强度特征研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(增刊 1): 2651-2656. SHU Zhi-le, LIU Xin-rong, LIU Bao-xian, et al. Study of strength properties of earth-rock aggregate based on fractals[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 28(Suppl.1): 2651-2656.
- [25] 吴莹. 基于分形理论的堆石料级配优化研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2017. WU Ying. Study on optimization of rockfill gradation based on fractal theory[D]. Wuhan: Wuhan University, 2017.
- [26] 朱晟, 钟春欣, 郑希镭, 等. 堆石体的填筑标准与级配优化研究[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(1): 108-115. ZHU Sheng, ZHONG Chun-xin, ZHENG Xi-lei, et al. Filling standards and gradation optimization of rockfill materials[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(1): 108-115.